۶

آهنجش[۱] ریاضیاتی

۱. هندسه و ارزآغازیک[۲]

برای یونانیان، مهم‌ترین بخشِ ریاضیات، هندسه بود، و در دفترهای هفتم تا دهمِ اصول اُقلیدُس حتّا نگریستارهایی متعلق به علم‌حساب محض، مانند نگریستارهایی درباره‌ی اعداد اوّل، را می‌یابیم که به صورت گزاره‌هایی درباره‌ی هم‌اندازه‌پذیری[۳] یا ناهم‌اندازه‌پذیریِ خطوط ارائه شده‌اند. گفته شده است که غفلت نسبی یونانیان از دیگر شاخه‌های ریاضیات ناشی از نقصان دستگاه اعداد آنان بوده است؛ ولی محتمل‌تر به نظر می‌رسد که هندسه بدین سبب اوّل از همه توسعه یافت که تلاش مورد لزوم برای آهنجش آن، به اندازه‌ی تلاش مورد نیاز برای آهنجش جبر و آنالیز، بزرگ نیست. به‌زودی خواهیم دید که حتّا ریاضی‌دانان عصری بسیار متأخرتر نیز در آزادسازی خود از اتکای افراطی به شهود فضایی مشکل داشته‌اند. هرچه باشد، اصول اُقلیدُس، برای بسی سده‌ها، معیار دقت در همه‌ی برهان‌ها را برنهاد، و ما باید با بررسی الگوی کار او بیاغازیم، اگرچه دغدغه‌ی اصلیِ‌مان در این فصل ناظر به پیشرفت‌های بعدی خواهد بود.

روشن است که اُقلیدُس همه‌ی نگریستارهایی که در اصول عرضه می‌کند را کشف نکرده است. پیش‌از آغاز سده‌ی سوم ق. م.، یعنی پیش‌از زمانی که اُقلیدُس فعالیت می‌کرد، رساله‌هایی در باب

---

1. abstraction
2. Axiomatics
3. commensurability

هندسه وجود داشتند، و برای مثال، می‌دانیم که نظریه‌ی زیبای تناسب،[1] که وی از آن در دفتر پنجم استفاده می‌کند، از ائودوکسوس،[2] معاصر جوان‌ترِ افلاطون، سرچشمه می‌گیرد. ولی او به سبب تلاش‌اش برای استخراج همه‌ی اکتشافات پیشین از شمار نسبتاً اندکی از مبادی عام[3] (κοιναί ἔννοιαι)[4] و پیش‌بایست‌ها[5] (αἰτήματα)[6] به شهرت رسید. مبادی عام گزاره‌هایی هستند که گفته می‌شود در همه‌ی دانش‌ها بنیادی‌اند، مانند این‌که کلّ بزرگ‌تر از جزء است؛ و پیش‌بایست‌ها پنج گزاره‌ی مختص به هندسه‌اند که از ما خواسته می‌شود که در آغاز آن‌ها را بپذیریم. در زمان‌های بعدی این دو مجموعه از گزاره‌های نخستین گاه با هم تحت عنوان ارزآغازه‌ها[7] برنهاده می‌شدند. باید پذیرفت که اُقلیدُس در جاهای مختلف گزاره‌های هندسی‌ای را مسلّم می‌گیرد که نه مندرج در ارزآغازه‌های او هستند و نه اثبات شده است که از آن‌ها لازم می‌آیند، چنان‌که برای مثال، در اثبات گزاره‌ی نخستِ دفتر اوّل مسلّم می‌گیرد که دایره‌های ترسیم‌شده در دو سرِ یک خط راست، که طول شعاعی برابر با آن خط دارند، باید یکدیگر را در دو نقطه قطع کنند. ولی به‌دشواری می‌تواند تردیدی وجود داشته باشد در این‌که وی قصد داشته همه‌ی فرض‌های برون‌منطقی[8] اش را در آغاز برنهد و سپس نگریستارها را تنها با منطق از آن‌ها استخراج کند. زیرا هر چیز دیگر توافقی خواهد بود ناسازگار با آن میلِ به انضباط که در سراسر اثر او آشکار است. استفاده از شکل می‌تواند به ما کمک کند تا، هنگامی‌که داریم اثباتی را دنبال می‌کنیم، توجهِ‌مان را متمرکز کنیم، و به دلایل روانشناختی شاید حتّا در فرآیند اکتشاف ضروری باشد؛ ولی اگر گزاره‌ها را صرفاً از این روی بپذیریم که وقتی به شکلی توجّه می‌کنیم برای ما بدیهی به نظر می‌رسند، عملاً داریم، بدون اطلاع درست، به ارزآغازه‌هامان می‌افزاییم، و این بر خلاف روح کلّیِ هندسه‌ی یونانی است.

اُقلیدُس و همه‌ی اخلاف‌اش تا سده‌ی اخیر مسلّم گرفته‌اند که پیش‌بایست‌های او صدق‌هایی کلّی و ضروری درباره‌ی فضای فیزیکی‌اند. ولی در میان آن‌ها یکی هست که همیشه به نظر رسیده

---

1. proportion
2. Eudoxus
3. common notions
4. koinai ennoiai
5. postulates
6. aitemata
7. axioms
8. extra-logical

است که پیچیده‌تر از بقیه است. این [اصل] همان اصل معروف توازی است: «اگر یک خط راستِ افتاده بر دو خط راستْ زاویه‌های درونیِ واقع در یک جانب را کم‌تر از دو زاویه‌ی قائم کند، آن دو خط راست، در صورتی که به اندازه‌ی کافی امتداد یابند، در آن جانبی که زاویه‌های واقع در آن کم‌تر از دو قائم‌اند، به هم می‌رسند.» بطلمیوس[1] و پروکلوس[2] هر دو کوشیدند تا نشان دهند که این گزاره نباید به‌منزله‌ی یک پیش‌بایست ظاهر شود زیرا می‌تواند به‌مثابه‌ی یک نگریستار مبرهن گردد، و بسی تلاش‌های مشابه به دست هندسه‌دانان بعدی برای بهبودبخشی به کار اُقلیدُس صورت گرفت.[3] یکی از جالب‌ترینِ این تلاش‌ها از آنِ ساکّری در کتاب‌اش موسوم به اُقلیدُس پیراسته از هر خدشه‌ای بود که در ۱۷۳۳ منتشر شد. این تلاش، چنان‌که خود او می‌گوید،[4] بر اصلِ *consequentia mirabilis* (پی‌آیش شگفت) که وی آن را در کتاب خویش موسوم به منطق برهانی به کار برده استوار است؛ و اگرچه این تلاش، چنان‌که وی بر آن است، به اثبات صدق ضروری اصل توازی توفیق نمی‌یابد، به‌منزله‌ی نخستین کارِ دربردارنده‌ی نگریستارهای هندسه‌ی نااُقلیدُسی شایسته‌ی اشتهار است.

بیشترِ هندسه‌دانان متقدم‌تری که ادّعا نموده‌اند اصل توازی را اثبات کرده‌اند، گزاره‌ی دیگری به همان قوّتِ گزاره‌ای که تلاش می‌کردند تا اثبات‌اش کنند را مسلّم گرفته‌اند. برای مثال، جان والّیس مسلّم گرفت که به ازای هر شکل معیّنی ممکن است که شکل مشابهی با هر اندازه‌ای وجود داشته باشد. کار ساکّری خیلی جسورانه‌تر بود: او می‌خواست نشان دهد که اصل توازی از این روی صدقی ضروری است که حتّا از نقیض خودش هم لازم می‌آید. او برای این‌که صورت مناسبی به این نقیض بدهد، نه بیان اُقلیدُس از این اصل، بلکه یک بیان هم‌ارز که به‌وسیله‌ی شکلی در ویراست کلاویوس از اُقلیدُس ارائه شده بود را در نظر گرفت. از دو سرِ خطی راست به نام AB دو خط عمود با طولی برابر به نام‌های AC و BD در یک جانبِ واحد کشیده می‌شوند، و سپس نقاط C و D با یک خط راست به هم وصل می‌شوند. در چهارضلعیِ به‌دست‌آمده، زوایای C و D باید برابر باشند، و می‌توان نشان داد که اصل توازی اُقلیدُس هم‌ارز است با این فرض که هر دوی آن‌ها زوایای قائم‌اند. بنابراین ساکّری دو فرضیه‌ی قابل‌تصوّر دیگر را بررسی می‌کند، یعنی (۱) این‌که زاویه‌ها باز باشند و (۲) این‌که تند باشند. این‌ها به‌ترتیب مطابق‌اند با دو صورت از هندسه‌ی نااُقلیدُسی که بعداً با عنوان [هندسه‌ی] بیضوی[5] و

1. Ptolemy
2. Proclus
3. T. L. Heath, *The Thirteen Books of Euclid s Elements*, i, pp. 202 f.
4. P. 99.
5. elliptic

[هندسه‌ی] هذلولی[1] متمایز شدند؛ و او در جریان پژوهش‌اش برخی از نگریستارهای خاصّ این هندسه‌ها را اثبات می‌کند. برای مثال، در گزاره‌ی ix نشان می‌دهد که بنا به فرضیه‌ی زاویه‌ی باز، مجموع زوایای درونی مثلث همیشه بزرگ‌تر است از دو زاویه‌ی قائم، و بنا به فرضیه‌ی زاویه‌ی تند همیشه کوچک‌ترند. ولی تلاش او برای اثبات اصل توازی از طریق بررسی این دو بدیل قابل‌تمییز که تحت پوشش نقیض آن [اصل] اند چندان مناسب نیست. برای مورد اوّل، به نظر می‌رسد که وی در گزاره‌ی xii به‌سادگی با نشان دادن این امر به نتیجه‌ی مطلوب می‌رسد که فرضیه‌ی زاویه‌ی باز مستلزم اصل توازی است (و بنابراین خود‌ـمتناقض است، چون اصل توازی خودْ مستلزم فرضیه‌ی زاویه‌ی قائم است). امّا وی این کار را تنها با پذیرش ضمنی این امر انجام می‌دهد که یک خط راست می‌تواند به هر طول دلخواه امتداد یابد. پذیرش این امر در واقع با فرضیه‌ای که وی دارد بررسی‌اش می‌کند ناسازگار است، چون در هندسه‌ی بیضوی باید برای یک خط راستْ طولی نهایی وجود داشته باشد. فرضیه‌ی دیگر او را به دردسر بزرگ‌تری می‌افکند، و اگرچه بعدتر چنان سخن می‌گوید که گویی از آغاز تا انجام بر *consequentia mirabilis* (پی‌آیش شگفت) اتکا کرده بوده است، حتّا سعی نمی‌کند تا نشان دهد که این بدیل مستلزم اصل توازی است. ولی او ادّعا می‌کند که در گزاره‌ی xxiii اثبات می‌کند که این [بدیل] مستلزم پیامدی خود‌ـمتناقض است. اگر برهان او رضایت‌بخش می‌بود، البته، با گزاره‌ی xii کفایت می‌کرد که صدق اصل توازی را به اثبات برساند؛ ولی در استدلال او نقیصه‌ای وجود دارد.

به‌یقین معلوم نیست که آیا کار ساکّری بر ریاضی‌دانانی که هندسه‌ی نا‌ـاُقلیدُسی را در سده‌ی نوزدهم پدید آوردند تأثیری داشته است یا نه، ولی این کتاب راه‌اش را به درون شماری از کتاب‌خانه‌ها پیدا کرد و در برخی از آثار مرجع مانند تاریخ ریاضیات[2] نوشته‌ی مونتوکلا[3] که در ۱۷۵۸ منتشر شد و بررسی مشهورترین تلاش‌ها برای اثبات برهانیِ نظریه‌ی توازی[4] نوشته‌ی کلوگل[5] که در ۱۷۶۳ منتشر گردید، ذکر شد.[6] [کار ساکّری] شاید از این طریق مورد توجّه گاوس (۱۸۵۵-۱۷۷۷) قرار گرفته باشد، همو که نخستین کسی بود که امکان ایجاد هندسه‌ی نا‌ـاُقلیدُسی به شیوه‌ای سازگار را دریافت و آن را مسئله‌ای به‌شمار آورد که، از طریق ملاحظه‌ی این‌که آیا زوایای درونیِ مثلث در فضای فیزیکی

1. hyperbolic
2. *Histoire des mathė matiques*
3. Montucla
4. *Conatuum Praecipuorum Theoriam Parallelarum Demonstrandi Recensio*
5. Klü gel
6. Corrado Segre, 'Conjettuie intorno all'influenza di Girolamo Saccheri sulla formazione della geometria non-euclidca', *Alii della R A della Scienze di Torino*, xxxviii (1903).

برابر با دو زاویه‌ی قائم هست یا نیست، قابل فیصله است. ولی گاوس در این حوزه از پژوهش ریاضیاتی، همچون بسیاری از حوزه‌های دیگری که در آن‌ها اکتشافات درخشانی کرد، چیزی منتشر نکرد. نخستین اثر چاپ‌شده که شکلی از هندسه‌ی نا‌ـاُقلیدُسی را فی‌نفسه / مستقلاً پدید آورد مقاله‌ای از لوباچفسکی[۱] بود که در ۱۸۲۶ منتشر شد. این مقاله به فرضیه‌ی زاویه‌ی تند پرداخته است (یعنی به هندسه‌ی هذلولی که در آن دو خط موازیِ با یک خطِ راستِ معیّن وجود دارند که از وسطِ نقطه‌ای معیّن می‌گذرند). بسط فرضیه‌ی زاویه‌ی باز (یعنی بسط هندسه‌ی بیضوی که در آن خطوطِ موازیِ با یک خطِ راستِ معیّن که از وسط نقطه‌ای معیّن بگذرند وجود ندارند و هر خط راست در صورتی که امتداد یابد به خود بازمی‌گردد) می‌بایست منتظر ریمان[۲] می‌ماند. ریمان در ۱۸۵۴، یک سخنرانیِ معارفه داشت با عنوان درباره‌ی فرض‌هایی که هندسه بر آن‌ها مبتنی است[۳]؛ و در حقیقت تا زمانی که این سخنرانی در ۱۸۷۶، یعنی پس‌از مرگ‌اش، منتشر شد، هندسه‌ی نا‌ـاُقلیدُسی از سوی ریاضی‌دانان محض جدّی گرفته نمی‌شد؛ و حتّا پس‌از آن نیز تأملات ریمان و شاگردش کلیفورد[۴] درباره‌ی امکان استفاده از هندسه‌ی نا‌ـاُقلیدُسی در فیزیک در طول بیش‌از یک نسل مورد بی‌اعتنایی قرار گرفت.

این پیشرفت‌ها در هندسه، بیش‌از هر چیز، از این روی برای منطق‌دان مهم‌اند که توجهات را به ارزآغازیک[۵] یا نظریه‌ی مجموعه‌های پیش‌بایست‌ها[۶] جلب کردند. اگر نشان داده شده بود که با نفی اصل توازی اُقلیدُس، در دستگاهی که همه‌ی دیگر ارزآغازه‌های او را حفظ کرده، تناقضی به میان آمده است، با برهان خلف اثبات می‌شد که اصل توازی از دیگر ارزآغازه‌ها لازم می‌آیند. در برابر، صِرف نیافتن تناقض، به خودی خود، برای اثبات سازگاری یک هندسه‌ی نا‌ـاُقلیدُسی کفایت نمی‌کند. به این منظور باید اثبات کرد که هیچ تناقضی اصلاً نمی‌تواند به دست آید. این شرط بسیار بزرگی است، و، چنان‌که بعدتر خواهیم دید، برآوردن آن به هیچ روی آسان نیست. ولی بدون پیش‌رفتن تا بدین‌جا، می‌توانیم کاری کنیم که درستی هندسه‌ی نا‌ـاُقلیدُسی تأیید شود، از این طریق که نشان دهیم این هندسه نمی‌تواند ناسازگار باشد مگر این‌که هندسه‌ی اُقلیدُسی نیز ناسازگار باشد؛ و این نتیجه در سده‌ی اخیر با کشف راه‌های ارائه‌ی هندسه‌ی نا‌ـاُقلیدُسی در درون دستگاه اُقلیدُس عملاً به دست

1. Lobachevsky
2. Riemann
3. *Über die Hypothesen welche der Geometrie zu Grunde liegen*
4. Clifford
5. axiomatics
6. the theory of postulate sets

آمد. در معروف‌ترینِ این راه‌ها، ما فرض می‌کنیم که وقتی، در فهرست زیر، اصطلاحی از سمت راست در هندسه‌ی بیضوی می‌آید همان معنایی را دارد که اصطلاح متناظر در سمت چپ در هندسه‌ی اُقلیدُسی دارد:

سطح صاف	رویه‌ی یک کُره
خط راست	قوس یک دایره‌ی بزرگ
زاویه‌ی بین دو خط راست	زاویه‌ی بین رویه‌های دو دایره‌ی بزرگ

اگر به دیگر اصطلاحات به‌کاررفته در هندسه‌ی بیضویِ دوبُعدی[۱] امکان داده شود که معانیِ رایج برای چنین اصطلاحاتی در هندسه‌ی اُقلیدُسی را حفظ کنند، در این صورت کلّ دستگاه به هندسه‌ی سطح یک کره‌ی اُقلیدُسی[۲]، که برای دریانوردان شناخته‌شده است، دگرگون می‌شود، و همه‌ی گزاره‌های خاص هندسه‌ی بیضویِ دوبُعدی در این تعبیر جدیدْ صادق یافت خواهند شد. از وسطِ یک نقطه‌ی معیّن هیچ خطّی نمی‌تواند موازی با یک خطّ راست معیّن رسم شود؛ طولی نهایی برای یک خط راست وجود دارد؛ و مجموع زوایای درونی هر مثلث بزرگ‌تر از دو زاویه‌ی قائم است. از این لازم می‌آید که اگر هندسه‌ی اُقلیدُس سازگار باشد، هندسه‌ی بیضویِ دوبُعدی نیز سازگار است.[۳] فلیکس کلین[۴] و دیگران، با تعابیر مناسب [و البته] از گونه‌ای نسبتاً پیچیده‌تر، نشان داده‌اند که هندسه‌ی بیضوی و هذلولی سه‌بُعدی، هر دو را می‌توان در درون هندسه‌ی اُقلیدُسی بیان کرد. این بدان معنا نیست که هندسه‌های نااُقلیدُسی با بخش‌هایی از هندسه‌ی اُقلیدُسی این‌همان‌اند، بل تنها بدین معناست که می‌توان نقشه‌ی آن دو را در درون هندسه‌ی اُقلیدُسی ترسیم کرد، به معنایی نسبتاً شبیه به این‌که نقشه‌ی سطح فرانسه را می‌شود بر بخشی از سطح انگلستان ترسیم کرد.

پس درباره‌ی جایگاه اصل توازی اُقلیدُس چه باید بگوییم؟ اگر هندسه‌ی اُقلیدُس سازگار باشد، روشن است که در نفی این اصل هیچ تناقض منطقی‌ای نهفته نیست، و نیز نه در ترکیب عطفی نقیض آن با دیگر ارزآغازه‌های اُقلیدُس، که این معادل است با آن‌که بگوییم این اصل از آن ارزآغازه‌های دیگر مستقل است. اگر کسی بخواهد پافشاری کند که این اصل بر خطوط راست در فضای فیزیکی

---

1. elliptic geometry of two dimensions

2. the geometry of the surface of a Euclidean sphere

۳. گاه عنوان «بیضوی» به هندسه‌ای اختصاص می‌یابد که در آن نقاط متقاطر (antipodal) این‌همان‌اند. در این صورت دستگاهی که در بالا مورد نظر است هندسه‌ی کروی نامیده می‌شود.

4. Felix Klein

صادق است، شاید بتواند چنین کند؛ ولی ریاضی‌دان محض نیازی ندارد که خود را با این مسئله درگیر کند. زیرا پیدایش هندسه‌های نا‌اُقلیدُسی، در میان ریاضی‌دانان، نسبت به کلّ هندسه، از جمله هندسه‌ی اُقلیدُس، به‌ناگزیر یک تغییر رویکرد ایجاد کرده است. از آن‌جا که چند بدیل وجود دارد، که همه شایسته‌ی پژوهش‌اند، کار ریاضی‌دان نمی‌تواند این باشد که بر ارزآغازه‌هایی تأکید کند که یکی از بدیل‌ها را آن‌چه هست می‌کند. وظیفه‌ی او این است که بگوید از مجموعه‌ی معیّنی از ارزآغازه‌ها منطقاً چه لازم می‌آید. توجّه به هندسه‌ی سنتی بدین شیوه، طبعاً، به لزوم صورت‌بندی صریح همه‌ی پیش‌فرض‌های آن انجامیده است، یعنی به عملی کردن برنامه‌ای که به اُقلیدُس نسبت دادیم؛ و این پیامدها را در بازنمودهای جدید از هندسه‌ی اُقلیدُس، مثلاً در کتاب هیلبرت[1]، شالوده‌های هندسه[2]، که به سال ۱۸۹۹ منتشر شد، می‌توان دید. ولی این شیوه‌ی نگرش به هندسه به گونه‌ای از آهنجش نیز انجامیده است که فاصله‌ی زیادی از علایق اُقلیدُس دارد.

هنگامی‌که یک گزاره منطقاً از گزاره‌ای دیگر لازم می‌آید، امکان‌پذیر است که این دو گزاره را به شیوه‌ای صورت‌بندی کرد که بتوان دید که ارتباطشان تنها بر صورتِشان مبتنی است، یعنی بر ساختار منطقیِ‌شان که در برابرِ مادّه و محتوای آن‌ها قرار دارد. حال این کار را می‌توان برای گزاره‌های هندسه انجام داد. در بازنمودهای رایج از هندسه‌ی اُقلیدُسی، درک صورت ارزآغازه‌ها آسان نیست زیرا ما شماری از نشانه‌های خاص مانند «نقطه»، «خط»، «سطح صاف»، «واقع می‌شود بر»، «بین»، «موازی»، و «متساوی» را به‌کار می‌بریم، ولی می‌توانیم همه‌ی ارزآغازه‌هایی را که برای هندسه‌ی اُقلیدُسی متعارف نیاز داریم بدون استفاده از نشانه‌ای خاص به‌جز واژه‌ی «نقطه» و عبارت «A از B همان فاصله‌ای را دارد که C از D»، که تساوی را به صورت نسبتی چهارحدّی میان نقطه‌ها بیان می‌کند، بنویسیم. برای نمونه، به جای «C با A و B هم‌خط[3] است (بر یک خط راست قرار دارد)» می‌توانیم بگوییم «اگر P و Q دو نقطه باشند که A از P همان فاصله‌ای را داشته باشد که از Q دارد، و B از P همان فاصله‌ای را داشته باشد که از Q دارد، آن‌گاه C نیز از P همان فاصله‌ای را دارد که از Q دارد». و به جای «C بین A و B است» می‌توانیم بگوییم «C با A و B هم‌خط است و سه نقطه‌ی P، Q، و R وجود دارند که (۱) P با A و B هم‌خط است، (۲) P از A همان فاصله‌ای را دارد که از B دارد، (۳) Q از P همان فاصله‌ای را دارد که P از A دارد، (۴) R از P همان فاصله‌ای را دارد که P از A دارد،

---

1. Hilbert
2. *Grundlagen der Geometrie*
3. collinear

(۵) C با Q و R هم‌خط است، و (۶) C از Q همان فاصله‌ای را دارد که از R دارد». و به جای «خط AB موازی است با خط CD» می‌توانیم بگوییم که «مجموعه‌ی نقاط هم‌خط با A و B و مجموعه‌ی نقاط هم‌خط با C و D هیچ عضو مشترکی ندارند». حتّا نیازی به استفاده از واژه‌ی «نقطه» نیست؛ زیرا می‌توانیم آن را با اطمینان خاطر رها کنیم تا چنین فهمیده شود که اشیا یا عناصری که با تک‌حرف‌ها به آن‌ها اشاره می‌کنیم همان چیزهایی، هرچه باشند، هستند که در طبیعت مناسب‌اند که حدهای نسبت چهارحدّی مذکور در ارزآغازه‌ها باشند. روشن است که مجموعه‌ای از فرمول‌های ارزآغازیِ کافی برای هندسه‌ی اُقلیدُسیِ متعارف را بدین شیوه نوشتن ملال‌آور است، ولی هنگامی‌که این کار انجام شود، آشکار است که به جز عبارت «A از B همان فاصله‌ای را دارد که C از D دارد»، تنها واژه‌های به‌کاررفته آن‌هایی هستند که ما به بیان صورت اختصاص می‌دهیم، مانند «و»، «یا»، «نه»، «اگر»، «هر»، «هست»، و نشانه‌هایی که به‌عنوان متغیرها به‌کار می‌روند. و از آن‌جا که نگریستارها را هم می‌توان در قالب این نمادپردازی بیان کرد، می‌توان بی‌تردید احراز کرد که لزوم نگریستارها از ارزآغازه‌ها وابسته به معنایی نیست که عبارت «A از B همان فاصله‌ای را دارد که C از D دارد» در مقام اطلاق بر چیزهایی که مشاهده می‌کنیم دارد.

حال که تا بدین‌جا آمده‌ایم، می‌توانیم یک گام جلوتر بگذاریم و بگوییم که برای هندسه‌ی محض، معنای متعارف این عبارت کاملاً بلاموضوع است. اگر هر عبارت دیگری با چهار جای خالی وجود می‌داشت که می‌توانست به گونه‌ای سازگار در همه‌ی فرمول‌های ارزآغازی جایگزین این عبارت شود، آن‌گاه همان عبارت می‌توانست در فرمول‌های نگریستاری[1] نیز جایگزین این عبارت شود، بدون تغییر نسبت‌های دومی به اوّلی. آن‌چه هندسه‌دان بدان حکم می‌کند این گزاره‌ی بسیار آهنجیده[2] است که هر نسبت چهار حدّی‌ای که همه‌ی شروطِ منطقیِ تعیین‌شده در فرمول‌های ارزآغازی[3] را برمی‌آورَد باید هر یک از شروطِ منطقیِ صورت‌بندی‌شده در فرمول‌های نگریستاریِ متعدد را هم برآورد؛ و هندسه‌دان اگر بخواهد می‌تواند این مطلب را با استفاده از یک حرف به جای عبارت ارائه‌شده در بالا روشن سازد، درست به همان سان که ارسطو در صورت‌بندی اصول نظریه‌ی قیاس از حروف استفاده کرد. شروطی که در فرمول‌های مختلف هندسه با نشانه‌های دیگر بیان شده‌اند پیچیدگی‌ای دارند که ارسطو به آن‌ها عنایت نکرده است، ولی با این همه، آن‌ها به طور محض منطقی‌اند.

1. theorem formulae

2. abstract

3. axiom formulae